Binomische Formeln

(1) $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$
$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Quadratische Gleichungen

100 € für 2 Jahre an

106,90 € Ergebnis

Wie hoch ist der Zinssatz?

K_0 : Grundkapital $K_0 = 100$

i : Zinssatz

Nach einem Jahr: K_1

$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$

Nach 2 Jahren

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_0 + K_0 \cdot i + (K_0 + K_0 \cdot i) \cdot i$$
$$= K_0 + K_0 \cdot i + K_0 \cdot i + K_0 \cdot i^2$$
$$= K_0 + 2 K_0 \cdot i + K_0 \cdot i^2$$

Lösen?!

Ganz einfach

$x^2 = a$

Wurzel:

$\sqrt{y}$

$\sqrt{x^2} = x$: Umkehrfunktion zum Quadrieren

Gesetze

$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

Es gilt $\boxed{\text{nicht}}$: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

FALSCH!!

$x^2 = a \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Bsp: $x^2 = 9$ 2 Lösungen $x_1 = 3$ $3 \cdot 3 = 9$

$x_2 = -3$ $(-3) \cdot (-3) = 9$

$x^2 = 0$ 1 Lösung $x_{1,2} = 0$

$x^2 = -9$ keine Lösung

Warum eigentlich?

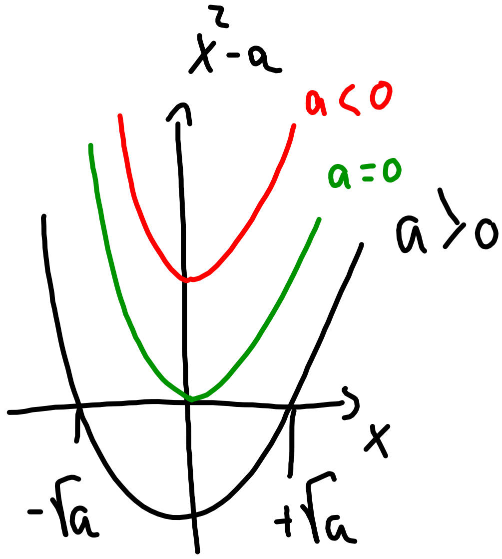
$x^2 = a$

2 LSG: $a > 0$

1 LSG: $a = 0$

0 LSG: $a < 0$

$\underbrace{x^2 - a = 0}_{\text{malen}}$



Allgemein:

$a x^2 = b \quad | :a$

$\Leftrightarrow \; x^2 = \frac{b}{a} \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow \; x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

Etwas schwerer

Bsp

$x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+4) = 0$

1\. LSG: $x_1 = 0$

2\. LSG: $x_2 = -4$

Allgemein:

$x^2 + px = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (x+p) = 0$

LSG1: $x_1 = 0$

LSG2: $x_2 = -p$

normal Einfach

$$x^2 + px + q = 0$$

„Normalenform"

Umweg für Sonderfall 1

$$(x+a)^2 = x^2 + 2a x + a^2 = 0$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 2a = p \\ a^2 = q \end{matrix}\right| \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q \rightarrow$$ Binomische Form

Beispiel: $x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 0$$

Wenn gilt $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q \rightarrow \left| \begin{matrix} x^2 + px + q = 0 \\ \rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \end{matrix}\right.$

Lösen: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \quad | \sqrt{\cdot}$

$$\Rightarrow x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2}$$

Etwas schwerer

$x^2+7x+12=0$ $\quad x_1=-3$, $x_2=-4$ | Warum?

Schönweis:

$(x+a)\cdot(x+b)=0$

$\Leftrightarrow x^2+a\cdot x+bx+a\cdot b=0$

$\Leftrightarrow x^2+(a+b)x+a\cdot b=0$ $\quad p=a+b$

$x^2+\quad p\quad\cdot x+\quad q\quad=0$ $\quad q=a\cdot b$

$x^2+7x+12=0$ | Vieta

$(x+3)\cdot(x+4)=0$ $\quad x_1=-3$, $x_2=-4$

$x^2+7x+10=0$

$(x+2)\cdot(x+5)=0 \nearrow$ $\quad x_1=-2$, $x_2=-5$

$x^2+x-12=0$

$\Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \nearrow$ $\quad x_1=-4$, $x_2=3$

$x^2-5x+6=0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \nearrow$ $\quad x_1=2$, $x_2=3$

Allgemein

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8 \quad \Big| + \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 1 \quad \Big| \sqrt{}$

$\Leftrightarrow x+3 = \pm 1$

$\Leftrightarrow x_1 = +1-3 = -2$

$x_2 = -1-3 = -4$

Ergänze $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

$$x^2 + px + q = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 + px = -q$ Ergänze mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ Binomi

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$D > 0$ 2 Lösungen

$D = 0$ 1 Lösung

$D < 0$ keine (reelle) Lösung

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$

a) $p = 6 \quad q = 10$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} =$

$= -3 \pm \sqrt{-1}$ ↯ keine LSG!

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$

$(x+2)(x+4) = 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = -4$