a) $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

b) $x^2 + 5x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (x+5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -5$

c) $x^2 + 7x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3) \cdot (x+4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = -4$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = 7 \quad q = 12$

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12}$

$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}}$

$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -4$

d) $x^2 - x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 4$

e) $x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \cdot (x+4) = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -4$

---

f) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \cdot (x-4) = 7$

$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 4$

g) $x^2 + 5x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \quad | \sqrt{\ }$

$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{57}{4}}$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = 5 \quad q = -8$

$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8}$

$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{32}{4}}$

h) $x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

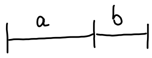
$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

i) $x^2 + x + 1 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ ↯

2)



$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

a) $a + b = 1$

b) $b = 1 - a$

a), b) einsetzen

$\frac{a}{1-a} = \frac{1}{a} \quad | \cdot a$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{1-a} = 1 \quad | \cdot (1-a)$

$\Leftrightarrow a^2 = 1 - a$

$\Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \quad | +1$

$\Leftrightarrow a^2 + a = 1 \quad | + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \underline{0{,}618}$

$a_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -1{,}618$ ☹

$b = 1 - a \approx \underline{0{,}382}$

100 € für 2 Jahre

-> 106,90

$K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2 \quad | : K_0$

gesucht: i

$\Leftrightarrow \frac{K_2}{K_0} = (1+i)^2 \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{K_2}{K_0}} = 1+i \quad | -1$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{K_2}{K_0}} - 1 = i \quad \rightarrow \pm\sqrt{\frac{106{,}9}{100}} - 1$

$\pm \quad 1{,}0339 - 1$

$i_1 = 0{,}0339 = 3{,}39\%$

$i_2 = -2{,}0339$ ↯

$$ax^2+bx+c=0 \quad |:a$$

$$\Leftrightarrow x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q}=0$$

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\
&= a^3 + a^2 \cdot b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

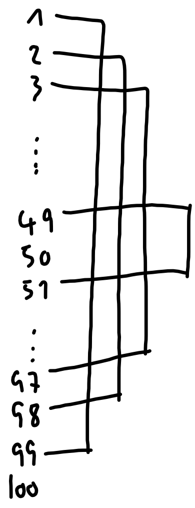
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pascal'sche Dreieck

1	$(a+b)^0$
1 1	$(a+b)^1$
1 2 1	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Das Summenzeichen



$49 \cdot 100 = 4900$

$$\begin{array}{r} 4900 \\ 100 \\ 50 \\ \hline 5050 \end{array}$$

obere Grenze

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\ldots+100$$

Index

untere Grenze

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{i=1}^{4} (2i+1) = 2\cdot 1+1 + 2\cdot 2+1 + 2\cdot 3+1 + 2\cdot 4+1$$

$i=1$

$i=2$

$i=3$

$$\sum_{i=2}^{5} (i^2-1) = 2^2-1 + 3^2-1 + 4^2-1 + 5^2-1$$

$$\sum_{i=1}^{5} 1 = 1+1+1+1+1 = 5\cdot 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c a_1 + c\cdot a_2 + c\cdot a_3 + \ldots + c\cdot a_n$$

$$= c\cdot(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$= c\cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} \cdot a^0 b^4$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

sprich „n über k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Die Fakultät $n!$

5 Leute

5 Stühle $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Lotto

$$P = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \binom{49}{6}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \Big| \quad 0! = 1$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$$

Potenzen

Zinseszinsformel

K_0 : Anfangskapital

i : Zinssatz

K_n : Kapital nach n Jahren

Nach 1 Jahr

$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$

$1+i = q$ Aufzinsfaktor

$K_1 = K_0 \cdot q$

Nach 2 Jahren

$K_2 = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$

$\vdots$

Nach 3 Jahren

$K_3 = K_2 \cdot q = K_0 \cdot q^3$

Allgemein: $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$ Leibniz'sche Zinseszinsformel

$K_0 = 100$ €

$i = 1{,}5\,\%$

$q = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$

$K_n = K_0 \cdot 1{,}015^n$

Frage: Wie lange muß ich 100 € bei 1,5 % Zinsen anlegen, um 200 € zu haben?

$K_n = K_0 \cdot q^n$ nach n auflösen

Potenzgesetze

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$

a^n Exponent, Basis

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1.000$

$10^4 = 10.000$

$10^6 = 1.000.000$

Große Zahl

$12345 = 1{,}2345 \cdot 10^4$
$= 1{,}2345\ E^4$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(10^3)^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\frac{a^n}{a^m}$ $n-m$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Problem:

$K_n = K_0 \cdot q^n$

allgemein:

$b = a^x$

Umkehrfunktion?

Der <u>Logarithmus</u>

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$e^x \leftrightarrow \ln(x)$ natürlicher Logarithmus

$10^x \leftrightarrow \log(x)$ Zehnerlogarithmus

$a^x \leftrightarrow \log_a(x)$ Logarithmus zur Basis a

$b = a^x \quad | \ln$

$\Leftrightarrow \ln(b) = \ln(a^x)$

$\Leftrightarrow \ln(b) = x \cdot \ln(a) \quad | : \ln(a)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = x$

Bsp: 200 € nach n Jahren

$200 = 100 \cdot 1{,}015^n \quad | : 100$

$\Leftrightarrow 2 = 1{,}015^n \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(2) = \ln(1{,}015^n)$

$\Leftrightarrow \ln(2) = n \cdot \ln(1{,}015) \quad | : \ln(1{,}015)$

$= \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}015)} = n \approx 46{,}6\ a$