In einigen Fällen kann es sein, dass man eine Gleichung gegeben hat, diese aber umstellen muß, weil man eine bestimmte Variable als Lösung sucht. Dieses Modul befasst sich mit dem Arbeiten mit Gleichungen.

Gleichungen, die nur Multiplikation und Division enthalten (Proportionale Gleichungen)

Eine Kugel habe ein Volumen von 100 Kubikzentimeter. Wie groß ist ihr Radius?

Das Kugelvolumen wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Gesucht ist dabei das Volumen *V*, gegeben der Radius *r*. In unserem Beispiel ist aber das Volumen *V* gegeben und der Radius *r* gesucht. Man geht wie folgt vor:

Zuerst bestimmt man, was gegeben ist und was gesucht ist. Dann ist die Idee, durch geeignetes Multiplizieren und dividieren die gesuchte Größe alleine auf einer Seite zu haben. Dazu muß man wissen:

Eine mathematische Gleichung wird nicht verändert, wenn sie auf beiden Seiten mit einem Wert oder einer Variablen multipliziert oder dividiert wird

Als kleines Verständnisbeispiel: wenn ein Lolli 20 Cent kostet, kosten 2 Lollies 40 Cent - Die Aussage wird also nicht verändert.

In unserem Beispiel soll der Radius *r* bestimmt werden. Dazu muß man zuerst den Faktor $\frac{4}{3}\pi$ auf die andere Seite bringen. Dazu multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Kehrwert, also schrittweise:

a) Multiplikation mit 3 auf beiden Seiten

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Big| \times 3$$

$$\Leftrightarrow 3V = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Leftrightarrow 3V = 4\pi r^3$$

Der senkrechte Strich auf der rechten Seite sagt: Mache mit beiden Seiten der Gleichung das, was hinter mir steht, also hier: Multiplikation mit 3.

Anmerkung 1: Mathematiker sind extrem schreibfaul. Aus diesem Grund lassen sie alle *Mal*punkte oder *Mal*kreuze weg, die nicht unbedingt nötig sind. *3V* bedeutet also das gleiche wie $3 \cdot V$ oder $3 \times V$

b) Division durch 4π auf beiden Seiten:

$$
\begin{aligned}
& 3V = 4\pi r^3 \quad \Big| \div 4\pi \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{4\pi}V = \frac{4\pi}{4\pi}r^3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{4\pi}V = r^3
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Ein Bruchstrich heisst das gleiche wie *geteilt*. Damit wird $(3V) \div (4\pi)$ zu $\frac{3V}{4\pi}$, was auch wesentlich einfacher zu schreiben ist und übersichtlicher.

Das Problem ist, dass das *r* noch nicht ganz alleine steht, sondern in der dritten Potenz als r^3. Um das zu lösen, gehen wir wie folgt vor:

c) Ziehen der dritten Wurzel als Umkehrung der 3. Potenz:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Ziehen der dritten Wurzel bedeutet: Finde eine Zahl, die drei mal mit sich selbst multipliziert die Ausgangszahl ergibt.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
4^3 &= 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\
\sqrt[3]{64} &= 4
\end{aligned}
$$

Das Volumen der Kugel sei 100 cm³, damit ergibt sich für den Radius:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}100cm^3} = \sqrt[3]{23{,}87cm^3} = 2{,}88cm$$

Die Kugel hat einen Radius von 2,88 cm.

Beim Lösen der Radiusgleichung haben wir stillschweigend den folgenden Zusammenhang ausgenutzt:

> *Eine mathematische Gleichung wird nicht verändert, wenn sie auf beiden Seiten potenziert oder radiziert wird.*

Radizieren heisst dabei Wurzelziehen (*lat.: Radix: die Wurzel*)

Aufgaben:

1) Das Volumen *V* eines Würfels ist definiert durch $V = a^3$. Stelle die Gleichung nach der Kantenlänge *a* um.

2) Die Fläche eines Kreises ist definiert durch $F = \pi r^2$. Wie muß man die Gleichung umstellen, wenn man den Radius *r* bei gegebener Fläche *F* berechnen will?

3) Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf: $3x^2 = 108$

Lösungen

1)
$$V = a^3 \mid \sqrt[3]{}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{V} = a$$

2)
$$F = \pi r^2 \mid \div \pi$$
$$\Leftrightarrow \frac{F}{\pi} = r^2 \mid \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \pm r$$

3)
$$3x^2 = 108 \mid \div 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 36 \mid \sqrt{}$$
$$\Rightarrow x = \pm 6$$

Gleichungen, die Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion enthalten (Lineare Gleichungen)

Diese Gleichungen enthalten Strich- und Punktrechnung. Um das Lösen zu verdeutlichen, diskutieren wir zuerst Gleichungen mit Strichrechnung.

Hier sei folgendes Beispiel gegeben:

Wenn ich 10 Puddings habe, aber mein Kurs hat 13 Teilnehmer, die Pudding wollen, wie viele Puddings muß ich noch kaufen?

Gesucht ist die Anzahl der zu kaufenden Puddings, die wir als x bezeichnen.

Dann heisst der Zusammenhang mathematisch betrachtet:

$$10 + x = 13$$

Um diese Gleichung zu lösen, muß man sie wieder umstellen. Dazu gilt folgender Satz:

> *Eine mathematische Gleichung wird nicht verändert, wenn auf beiden Seiten ein Wert oder eine Variablen addiert oder subtrahiert wird*

Also lässt sich diese Gleichung folgendermaßen behandeln:

$$\begin{aligned} & 10 + x = 13 \qquad \left| -10 \right. \\ \Leftrightarrow\ & 10 + x - 10 = 13 - 10 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Aufgabe erscheint extrem trivial, da Sie sie direkt im Kopf lösen werden. Dabei wenden Sie in Gedanken genau diesen Formalismus an. Sobald die Aufgabenstellungen jedoch etwas komplexer werden, ist man dazu meist nicht mehr in der Lage – oder man macht den ‚Knoten im Hirn'. Genau gegen diesen hilft der hier beschriebene Formalismus.

Beide Methoden, das vorher beschriebene Multiplizieren / Dividieren und das Addieren / Subtrahieren lassen sich hintereinander durchführen, wenn nötig, mehrmals. Dabei führt man zuerst alle Additionen /Subtraktionen aus, danach alle Multiplikationen / Divisionen. Als Beispiel:

$$3x + 15 = 5x + 25$$

Zuerst mittels Subtraktion alle ‚reinen' Zahlen ohne *x* auf eine Seite bringen:

$$
\begin{aligned}
& 3x+15=5x+25 \quad \left| -15 \right. \\
\Leftrightarrow\ & 3x+15-15=5x+25-15 \\
\Leftrightarrow\ & 3x=5x+10
\end{aligned}
$$

Jetzt die *5x* durch Subtraktion auf die andere Seite bringen

$$
\begin{aligned}
& 3x = 5x+10 \quad \left| -5x \right. \\
\Leftrightarrow\ & 3x-5x = 5x+10-5x \\
\Leftrightarrow\ & -2x = 10
\end{aligned}
$$

Nun das *x* durch Division mit (*–2*) isolieren:

$$
\begin{aligned}
& -2x = 10 \quad \left| \div(-2) \right. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(-2)x}{(-2)} = \frac{10}{(-2)} \\
\Leftrightarrow\ & x = -5
\end{aligned}
$$

Mit diesem Verfahren lassen sich alle (linearen) Gleichungen lösen. Lineare Gleichung sind Gleichungen, bei denen nur Punkt- und Strichrechnungen vorkommen.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Schema:

Lösen von linearen Gleichungen	
0)	*Bestimme, was in der Gleichung die gesuchte Variable x ist und was konstante Zahlen sind.*
1)	*Sortiere die Gleichung mittels Addition und Subtraktion, so dass auf der einen Seite nur Terme (=Ausdrücke) mit x vorkommen, auf der anderen Seite der Rest ohne x.*
2)	*Fasse nun beider Seiten zusammen, so dass die Gleichung die Form hat* x mal Faktor = Zahl
3)	*Teile nun beide Seite durch Faktor, so dass das x alleine steht*
4)	*Heureka! (Das ist griechisch (εύρηκα) und heisst: ich habs gefunden!)*

Das Ausmultiplizieren und Ausklammern

Ausmultiplizieren und Ausklammern wird immer dann notwendig, wenn eine Klammer und Multiplikation in einem Ausdruck enthalten ist. Beispiel:

$$5\cdot(3+2)$$

Natürlich können Sie diesen Ausdruck berechnen, indem Sie, wie gelernt, zuerst die Klammer berechnen und dann den Inhalt mit der davorstehenden 5 multiplizieren:

$$5 \cdot (3+2) = 5 \cdot 5 = 25$$

Manchmal kann es aber sinnvoll sein, zuerst den Ausdruck in der Klammer mit dem davorstehenden Wert auszumultiplizieren. Das geschieht, indem jeder Summand mit dem Faktor davor multipliziert wird:

$$5 \cdot (3+2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 15 + 10 = 25$$

Das sieht auf den ersten Blick komplizierter aus als das direkte Berechnen der Klammer. Sollten sie aber nicht nur Zahlen, sonder Variablen haben, haben sie keine andere Wahl. Stellen Sie sich folgende Gleichung vor:

$$3 \cdot (x+4) = 18\,.$$

Sie können diese nur nach x auflösen, wenn Sie die Klammer auf der linken Seite ausrechnen:

$$3 \cdot (x+4) = 3 \cdot x + 3 \cdot 4 = 3x + 12$$

Also haben Sie für die Gesamtgleichung

$$3x + 12 = 18 \quad \Big| -12$$

$$3x = 18 - 12$$

$$3x = 6 \quad \Big| \div 3$$

$$x = 2$$

Ohne das Auswerten der Klammer haben Sie keine Möglichkeit, die Gleichung zu lösen.

Aufgaben:

1) Stellen Sie folgende Gleichung schrittweise nach *x* um:

a) $5x + 35 = 70$ b) $15 + 35 = 10x - 10$ c) $3x + 18 = 6x - 10$

d) $\frac{5x+2}{3} = 2x$ e) $7x + 3 = 20x - 10$ f) $2x = \frac{3x + x}{2}$

g) $\frac{x+1}{10} = x$ h) $\frac{2}{3}x + 1 = x$ i) $x + 1 = x - 1$

2) Ein Rätsel: Wenn ich zu einer unbekannten Zahl 6 addiere und das Ergebnis durch 4 teile, erhalte ich wiederum die Ausgangszahl. Wie lautet diese?

3) Die Mehrwertsteuergleichung lautet

$$\text{Brutto} = \text{Netto} \cdot \left(1 + \frac{\text{Prozentzahl}}{100}\right)$$

Stellen Sie diese nach ‚Prozentzahl' um.

Lösungen:

1) a)
$$5x+35=70\,|-35$$
$$\Leftrightarrow 5x=35\,|\div 5$$
$$\Leftrightarrow x=7$$

b)
$$15+35=10x-10$$
$$\Leftrightarrow 50=10x-10\,|+10$$
$$\Leftrightarrow 60=10x\,|\div 10$$
$$\Leftrightarrow 6=x$$

c)
$$3x+18=6x-10\,|-3x+10$$
$$\Leftrightarrow 28=3x\,|\div 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{28}{3}=x$$

d)
$$\frac{5x+2}{3}=2x\,|\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow 5x+2=6x\,|-5x$$
$$\Leftrightarrow 2=x$$

e)
$$7x+3=20x-10\,|-7x+10$$
$$\Leftrightarrow 13=13x\,|\div 13$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

f)
$$2x=\frac{3x+x}{2}\,|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 4x=4x$$

Diese Gleichung wird von allen x erfüllt, die es gibt, sie hat unendlich viele Lösungen!

g)
$$\frac{x+1}{10}=x\,|\cdot 10$$
$$\Leftrightarrow x+1=10x\,|-x$$
$$\Leftrightarrow 1=9x\,|\div 9$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$$

h)
$$\frac{2}{3}x+1=x\,|-\frac{2}{3}x$$
$$\Leftrightarrow 1=x-\frac{2}{3}x$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{3}x\,|\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow 3=x$$

i)
$$x+1=x-1\,|-x$$
$$\Leftrightarrow 1=-1$$

Hier steht nun offenbar ein Widerspruch, da -1 nicht glich 1 sein kann: Die Gleichung ist also unlösbar. Es gibt eben keine Zahl, zu der ich 1 addieren kann und dann ist es das gleiche, als wenn ich 1 abziehe

2) Fasst man das Rätsel in einer Gleichung zusammen, ergibt sich

$$\frac{x+6}{4}=x$$

Diese Gleichung kann man wie gehabt auflösen:

$$\frac{x+6}{4}=x\,|\cdot 4$$
$$\Leftrightarrow x+6=4x\,|-x$$
$$\Leftrightarrow 6=3x\,|\div 3$$
$$\Leftrightarrow 2=x$$

x muß also den Wert von 2 haben.

3) Hier lauten die Variablen mal nicht *a,b,x* – trotzdem lösen wir die Gleichung wie gehabt auf:

$$\text{Brutto}=\text{Netto}\cdot\left(1+\frac{\text{Prozentzahl}}{100}\right)|\div\text{Netto}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\text{Brutto}}{\text{Netto}}=1+\frac{\text{Prozentzahl}}{100}\,|-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\text{Brutto}}{\text{Netto}}-1=\frac{\text{Prozentzahl}}{100}\,|\cdot 100$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\text{Brutto}}{\text{Netto}}-1\right)\cdot 100=\text{Prozentzahl}$$