Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach *x* auf:

a) $x^2 = 4$

kein Problem – einfach die Wurzel ziehen und das $\pm$ nicht vergessen..

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \qquad \qquad | \sqrt{\ } \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

b) $x^2 + 5x = 0$

Hier haben wir bei jedem Ausdruck ein *x*, also können wir *x* ausklammern:

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x+5) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

c) $x^2 + 7x + 12 = 0$

Das ist kein Binomischer Ausdruck – weil $\left(\frac{7}{2}\right)^2 \neq 12$. Also probieren wir es mit Vieta – und siehe da 3 und 4 gehen:

$$\begin{aligned} 3 + 4 &= 7 \\ 3 \cdot 4 &= 12 \end{aligned}$$

Damit können wir die Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)(x+4) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases} & \end{aligned}$$

d) $x^2 - x - 12 = 0$

Wiederum kein Binomischer Ausdruck – aber Vieta hilft auch hier, weil:

$$
\begin{aligned}
&x^2 - x - 12 &&= 0 \\
&\Leftrightarrow (x-4)(x+3) &&= 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

e) $x^2 + x - 12 = 0$

Und wie grade – Vieta mit +4 und -3 geht, da

$$
\begin{aligned}
4 - 3 &= 1 \\
4 \cdot (-3) &= -12
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + x - 12 &&= 0 \\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-3) &&= 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

f) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Und noch ein Vieta – weil

$$
\begin{aligned}
&-3 - 4 = -7 \\
&(-3) \cdot (-4) = 12
\end{aligned}
$$

Also los:

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 7x + 12 &&= 0 \\
&\Leftrightarrow (x-3)(x-4) &&= 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

g) $x^2 + 5x - 8 = 0$

Kein Binomi, kein Vieta – weil 8 die Teiler 4 und 2 hat und die ergeben in der Summe nicht 5. Also: Quadratisches ergänzen:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 5x - 8 = 0 \qquad |+8 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 5x = 8
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir auf beiden Seiten ergänzen:

$$\Leftrightarrow x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=8+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Nun links die 1. binomische Formel anwenden, rechts ausrechnen

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{32}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{57}{4}$$

Jetzt die Wurzel ziehen:

$$\Rightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{57}{4}}$$

Und damit ergibt sich mit den Potenzgesetzen:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{57}}{2} \\ x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{57}}{2} \end{cases}$$

h) $x^2+x-1=0$

Hier hilft mal wieder nur quadratisches Ergänzen oder p-q-Formel:

$$\begin{aligned} & x^2+x-1 && =0 && \mid +1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+x && =1 && \mid \text{mit} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ergänzen} \\ \Leftrightarrow\ & x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 && =\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 && \mid \text{Binomi} \\ \Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 && =\frac{5}{4} && \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & x+\frac{1}{2} && =\pm\sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} \\ x_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

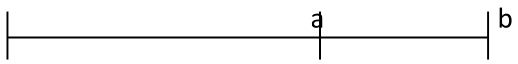
i) x^2+x+1

Versuchen wir es hier wieder mit quadratisch ergänzen:

$$\begin{aligned}
x^2+x+1 &= 0 && \mid -1 \\
\Leftrightarrow x^2+x &= -1 && \\
\Leftrightarrow x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-1 && \mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}-\frac{4}{4} && \mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} &&
\end{aligned}$$

Und an der Stelle können wir aufhören. Wir können nun nicht die Wurzel ziehen, da die rechte Seite negativ ist: Diese Aufgabe hat also keine Lösung! Hätten wir die p-q-Formel benutzt, hätten wir es daran gemerkt, daß der Ausdruck unter der Wurzel $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{3}{4}$ (die Diskriminante) negativ wird.

Aufgabe 2: Beim goldenen Schnitt verhalten sich zwei Teilstrecken *a* und *b* zueinander wie die Summe der Teilstrecken zur längeren Strecke:



Bestimmen Sie *a* und *b*, wenn beide Strecken zusammen 1 ergeben.

Das Problem ist, daß wir hier zwei Gleichungen haben. Nehmen wir die Verhältnisse und drücken es in einer Gleichung aus. Sei *a* die längere Strecke, dann gilt:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$$

Weiterhin sollen beide Teilstrecken addiert 1 ergeben:

$a+b=1$ oder, nach *b* aufgelöst: $b=1-a$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die erste Gleichung ein, um nur noch eine Gleichung mit einer Variablen zu haben, erhalten wir:

$$\frac{a}{1-a}=\frac{1}{a}$$

Hier müssen wir erstmal die Brüche loswerden, indem wir mit den Nennern multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{1-a} &= \frac{1}{a} && |\cdot(1-a) \\
\Leftrightarrow a &= \frac{1-a}{a} && |\cdot a \\
\Leftrightarrow a^2 &= 1-a && |\,\text{sortieren} \\
\Leftrightarrow a^2 + a &= 1
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir gleich die Form, um quadratisch zu ergänzen:

$$
\begin{aligned}
a^2 + a &= 1 \\
\Leftrightarrow a^2 + a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 && |\,\text{zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} && |\sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow a + \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618... \\ a_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = -1.618... \end{cases}
\end{aligned}
$$

Der Wert für a_2 ist eindeutig negativ, kann also keine zulässige Lösung sein – weil wir ja eine positive Strecke suchen. Damit ergibt sich für b:

$$
b = 1 - a = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382...
$$