Quadratische Gleichungen sind die nächste Stufe nach den linearen Gleichungen und den gebrochen rationalen Gleichungen. Auch diese Art von Gleichungen gibt es in verschiedenen Schwierigkeitsstufen. Aber wozu braucht man sie?

Kurze Motivation – warum quadratische Gleichungen

Stellen Sie sich vor, Sie legen ein Kapital von €100 für zwei Jahre an. Nach zwei Jahren erhalten Sie € 106,09. Zurück. Wie hoch war der Zinssatz?

Dröseln wir das ganze einmal auf. Die Zinszahl bezeichnen wir mit i – und meinen damit den Prozentsatz / 100. Hätten wir 10% Zinsen, so wäre $i = \frac{10\%}{100} = 0{,}1$. Unser Anfangskapital bezeichnen wir mit $K_0 = 100€$

Nach dem ersten Jahr haben wir das Kapital K_1, das sich aus unserem Anfangskapital und den Zinsen für das erste Jahr zusammensetzt, also

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$$

Das K_0 können wir nun ausklammern und erhalten

$$K_1 = K_0(1+i)$$

Der Faktor $1+i$ wird als *Aufzinsfaktor* q bezeichnet, also haben wir nach dem ersten Jahr ein Kapital von

$$K_1 = K_0 \cdot q$$

Im zweiten Jahr legen ist das Kapital K_1 wiederum die Grundlage und wird verzinst:

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1+i) = K_1 q$$

Setzen wir K_1 in, so kommen wir zu

$$K_2 = K_1 q = K_0 q\ q = K_0 q^2$$

Wir wissen, daß K_2 € 106,09 ist - wie kommen wir nun an i? Ersetzen wir wieder das $q = 1+i$, so kommen wir auf

$$K_2 = K_0(1+i)^2$$

und schon haben wir eine quadratische Gleichung.

Wenn wir nun i berechnen wollen, müssen wir diese Gleichung nach i auflösen können – und das ist Inhalt dieses Moduls.

Ganz allgemein gesprochen geht es um die Lösung eines mathematischen Ausdrucks

$$x^2 + px + q = 0$$

Ganz einfach: $x^2=a$

Ganz einfach sind quadratische Gleichungen in der Form

$$x^2 = a$$

Wir wissen, wir können auf beiden Seiten einer Gleichung auch eine Funktion anwenden. Die Funktion ‚Wurzel' ist die sogenannten Umkehrfunktion zum Quadrat, es gilt:

$$\sqrt{x^2} = x$$

Wenn wir die Wurzel auf ein Quadrat anwenden, erhalten wir also wieder x. Also tun wir das:

$$\begin{aligned} x^2 &= a \qquad |\sqrt{} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{a} \end{aligned}$$

Was soll das $\pm$ nun schon wieder?

Das Problem bei Quadraten ist, daß das Quadrat einer positiven Zahl gleich dem Quadrat der negativen Zahl ist – etwas zum Quadrat ist immer positiv!

Oder als Zahlenbeispiel:

$$(+3)^2 = (+3)\cdot(+3) = 9$$

Aber ebenso gilt

$$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$$

Die Gleichung

$$x^2 = 9$$

Wir daher von +3 und -3 gelöst! Daher müssen wir berücksichtigen: Wenn wir eine Wurzel ziehen, so ist immer das positive und negative Ergebnis zu beachten! Also

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \qquad |\sqrt{} \\ \Rightarrow x &= \pm\sqrt{9} \\ \Leftrightarrow x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Hier sehen wir schon, daß quadratische Gleichungen ganz schnell kompliziert werden können. Eine quadratische Gleichung kann nämlich zwei, eine oder auch gar keine Lösung haben. Wir haben gerade gesehen, daß die Gleichung

$$x^2 = 9$$

Genau zwei Lösungen hat, nämlich $x_1 = +3$ und $x_2 = -3$. Wie sieht es mit der Gleichung

$$x^2 = 0$$

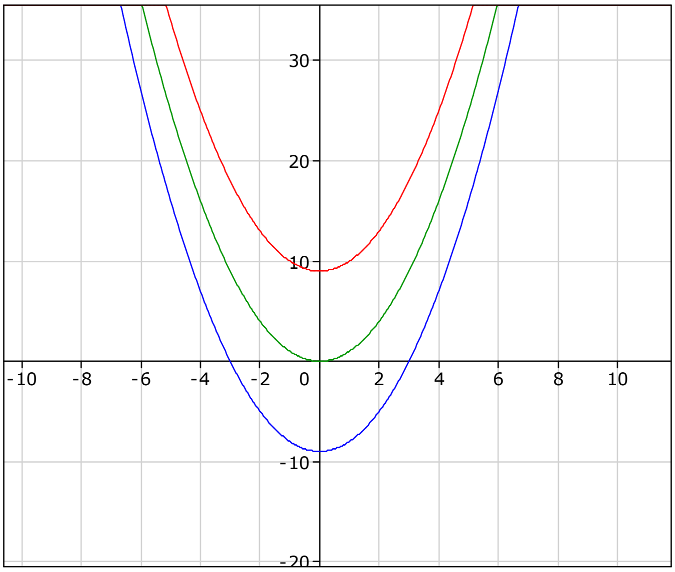
aus? Diese hat nur eine Lösung, nämlich $x=0$. Und was ist mit dieser Gleichung?

$$x^2 = -9 \text{ ?}$$

Diese hat gar keine Lösung, weil eine Quadratzahl immer positiv ist – es gibt keine Zahlen aus den reellen Zahlen, die diese Gleichung lösen!

Graphisch wird das Problem sofort klar. Wenn man die Gleichungen als Funktionen betrachtet, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 9 = 0 \text{ (rot im Diagramm)} \\ g(x) &= x^2 \qquad = 0 \text{ (grün im Diagramm)} \\ h(x) &= x^2 - 9 = 0 \text{ (blau im Diagramm)} \end{aligned}$$



Malen wir die Funktionen auf, indem wir das x auf der x-Achse und den dazugehörigen Funktionswert auf der y-Achse darstellen, so suchen wir die sogenannten Nullstellen – also die Stellen, bei denen der Funktionswert gleich Null wird und damit die x-Achse berührt bzw. durchquert. Und wie man sieht, berührt die rote Funktion die x-Achse gar nicht, die grüne berührt sie in einem Punkt und die rote durchquert sie in zwei Punkten.

Auch noch einfach: $x^2+px=0$

Wenn die Zahl in der quadratischen Gleichung nicht da ist, also $q=0$, ist die Lösung auch noch sehr einfach. Wie man sofort sieht, ist die Gleichung immer erfüllt, wenn $x=0$ ist Doch diese Gleichung hat noch eine zweite Lösung: Klammern wir dazu das x auf der linken Seite aus:

$$\begin{aligned} & x^2 + px = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (x+p) = 0 \end{aligned}$$

Wenn der Wert in der Klammer gleich Null wird, ist auch die ganze linke Seite gleich Null – also:

$$x + p = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -p$$

Damit können wir zusammenfassen:

Eine Gleichung der Form

$$x^2 + px = 0$$

hat die Lösungen:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -p$$

Nicht mehr ganz so einfach: Die Form $x^2+px+q=0$

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung oder die *Normalenform* lautet

$$x^2 + px + q = 0$$

Um diese Gleichung zu lösen, müssen wir uns etwas einfallen lassen, einfach die Wurzel ziehen reicht nicht mehr, da wir verschiedene Potenzen von x haben. Aber man kann diese Gleichungen allgemein lösen - und damit werden wir uns nun befassen.

Einfachstes Problem: Die binomische Form

Sie kennen die binomischen Formeln. Wir schreiben die Erste einmal mit anderen Buchstaben auf:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Vergleichen Sie nun einmal die allgemeine Form der quadratischen Gleichung mit dem ausmultiplizierten Binom und vergleichen Sie die Koeffizienten:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$
$$x^2 + 2a\,x + a^2 = 0$$

Wenn wir Glück haben, können wir unsere quadratische Gleichung als binomische Formel schreiben – nämlich genau dann, wenn es eine Zahl a gibt, daß gilt

$$p = 2a$$
$$q = a^2$$

Oder anders ausgedrückt (Lösen Sie die erste Gleichung nach a auf und setzen Sie sie in die zweite ein):

$$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Im Worten: Sie nehmen den ersten Koeffizienten p, teilen ihn durch zwei und quadrieren ihn. Wenn das Ergebnis gleich dem zweiten Koeffizienten q ist, können Sie die Form als binomische Form schreiben:

$$0 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Also, ein Beispiel:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Nehmen Sie die 6, teilen Sie sie durch 2 und quadrieren Sie das Ergebnis:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Und das entspricht genau dem hinteren Koeffizienten q! Wir können also diese Gleichung umschreiben!

$$0 = x^2 + 6x + 9 = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 = (x+3)^2$$

Diese Gleichung können wir nun lösen: Wenn der Term in der Klammer Null wird, so ist auch $0^2=0$. In diesem Beispiel muß also $x=-3$ sein, dann steht in der Klammer eine Null und die Gleichung ist gelöst!

Allgemein gilt:

Wenn eine quadratische Gleichung die Form hat

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

ist die Lösung wie folgt:

Umschreiben der Gleichung:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

und damit ist die (einzige) Lösung:

$$x_1 = -\frac{p}{2}$$

Wie sieht es denn aus, wenn in der quadratischen Gleichung ein minus steht, also p negativ ist?

Kein Problem, dann setzen Sie für die Lösung eben einen negativen Wert für p ein und bedenken, daß minus mal minus plus ergibt!

Also:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Es gilt ja immer noch:

$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

Problematisch wird es nur, wenn der hintere Term negativ ist – weil der muß nach de binomischen Formeln immer positiv sein! Also

$$x^2 + 6x - 9 = 0$$

können Sie nicht in eine binomische Form zwingen!

Leider geht dieses Verfahren nicht für alle quadratischen Gleichungen, bei $x^2 + 6x + 8 = 0$ geht's schon nicht mehr – weil eben

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9 \neq 8 \,..$$

Schade, da müssen wir uns etwas anderes einfallen lassen.

Der Satz von Vieta

Schön wäre es doch, wenn wir unsere quadratische Gleichung umschreiben könnten:

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q \quad = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+a)(x+b) = 0 \end{aligned}$$

Dann könnten wir die Lösungen nämlich direkt ablesen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -a \\ x_2 &= -b \end{aligned}$$

und das Problem wäre erledigt. Immer, wenn eine der beiden Klammern Null wird, ist die Gleichung erfüllt.

Rechnen wir die multiplizierten Klammern doch mal aus und fassen zusammen:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Diesen Ausdruck können wir mit der Normalenform vergleichen:

$$\begin{aligned} x^2 + & \quad p \quad \cdot x + q = 0 \\ x^2 + & (a+b) \cdot x + ab = 0 \end{aligned}$$

Wann sind diese Ausdrücke nun gleich? Genau - wenn die Koeffizienten gleich sind. Damit muß gelten:

$$\begin{aligned} p &= a + b \\ q &= a \cdot b \end{aligned}$$

Diese Technik, zwei Gleichungen miteinander zu vergleichen, heißt übrigens Koeffizientenvergleich. Das Ergebnis sagt Ihnen jetzt vielleicht nicht soviel – aber sehen Sie mal genau hin:

Wenn Sie es schaffen, zwei Zahlen a und b zu finden, die addiert den vorderen Koeffizienten p ergeben und multipliziert den hinteren q – so sind das die negativen Lösungen der Gleichung! (Dieser Satz ist der Satz von Vieta in umgangssprachlicher Form)

Fangen Sie nicht an, diese Zahlen auszurechnen; aber vielleicht sehen Sie sie ja direkt. Wenn nicht. Lernen wir noch weitere Methoden, quadratische Gleichungen zu lösen. Für einfache Aufgaben aber kann die Methode nach Vieta am schnellsten sein. Ein kleines Beispiel:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Wir suchen zwei Zahlen, die zusammen multipliziert 10 ergeben und addiert 5. Wie wäre es mit 2 und 3?

$$2 + 3 = 5$$
$$2 \cdot 3 = 6$$

Passt. Also können wir schreiben

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x + 6 \quad = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)(x+3) = 0 \end{aligned}$$

und damit können wir die Lösungen wieder direkt ablesen:

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -3$$

Dieses Vorgehen nennt man faktorisieren, da die linke Seite Faktoren zerlegt wird.

Denken Sie dabei an die Vorzeichen. So kann zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

überführt werden in

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

Auch negative q's sind möglich:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2 - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+5)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

Und wenn Sie nicht auf diese Zahlen kommen? Na dann muß die Lösung eben auf die harte Tour berechnet werden:

Quadratisches Ergänzen und die p-q-Formel

Zuerst gucken wir uns die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung an einem Beispiel an.

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Und stellen wir uns vor, wir hätten über Faktorisieren keine Lösung gefunden, weil wir sie einfach nicht gesehen haben. Wurzel ziehen über die ganze Gleichung macht keinen Sinn. Aber können wir nicht trotzdem versuchen, die linke Seite als einen Binomischen Ausdruck zu schreiben? Dann hätten wir ja keine gemischten Terme mehr mit x^2 und x und könnten bequem die Wurzel ziehen. Also versuchen wir es und bringen die 6 als Teil ohne x erstmal nach rechts:

$$x^2 + 6x = -8$$

Richtig klasse wäre es, wenn auf der linken Seite stünde

$$x^2 + 6x + 9$$

-Sie erinnern sich? Die Hälfte von 6 zum Quadrat – dann könnten wir es als binomischen Ausdruck schreiben. Aber – wir dürfen doch in einer Gleichung auf beiden Seiten was dazuaddieren! Also schreiben wir diese Quadratische Ergänzung auf beiden Seiten dazu:

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

Nun können wir die rechte Seite als binomischen Ausdruck schreiben und haben gewonnen:

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 &&= -8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 &&= -8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Nun können wir die Wurzel ziehen und haben das x von Quadrat befreit! Aber vorher fassen wir die ganzen Brüche durch ausrechnen noch zusammen

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & (x+3)^2 = -8 + 3^2 \\ \Leftrightarrow & (x+3)^2 = 1 \end{aligned}$$

Jetzt können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhalten:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left((x+3)^2\right)} &&= \pm\sqrt{1} \\ \Leftrightarrow & x+3 &&= \pm\sqrt{1} \\ & x_1 &&= -3 + \sqrt{1} = -2 \\ & x_2 &&= -3 - \sqrt{1} = -4 \end{aligned}$$

Und schon haben wir die Gleichung gelöst. Dieses Verfahren nennt sich *quadratisches Ergänzen* –weil wir die linke Seite zu einem quadratischen Ausdruck ergänzt haben. Formulieren wir das ganze nun allgemein: Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

Um sie zu lösen, bringen wir zuerst den q-Term auf die rechte Seite:

$$x^2 + px = -q$$

Um nun die linke Seite als binomischen Ausdruck schreiben zu können, müssen wir mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten ergänzen:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Nun können wir die rechte Seite mittels Binomischer Formeln umformen:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Jetzt können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen – und vergessen dabei natürlich nicht das $\pm$ ☺

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und kommen endlich zu den Lösungen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dieser Ausdruck ist auch als p-q-Formel bekannt. Sie können nun diese Formel auswendig lernen – oder Sie verstehen das Konzept des quadratischen Ergänzens.

Der Ausdruck unter der Wurzel $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt übrigens *Diskriminante* und entscheidet darüber, wie viele Lösungen die Gleichung hat:

1. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$: Es gibt zwei Lösungen. Welche der beiden sinnvoll ist, entscheidet unter Umständen die Aufgabenstellung.

2. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$: Dann gibt es nur eine Lösung – da die Wurzel wegfällt. Die Lösung heisst dann $x_1 = -\frac{p}{2}$

3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: Es gibt gar keine Lösung – denn Wurzeln aus negativen Zahlen sind verboten.

Und was machen wir, wenn vor dem x^2 noch ein Faktor steht, die Gleichung also so aussieht:

$ax^2 + bx + c = 0$?

Nun, ganz einfach – teilen Sie die Gleichung durch a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

und kürzen Sie ab:

$$p = \frac{b}{a}$$
$$q = \frac{c}{a}$$

und gehen Sie vor wie gehabt.

Und nun: die Lösung der Anfangsaufgabe. Die zu lösende Gleichung hieß:

$$K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2$$

Zum Glück haben wir hier bereits einen binomischen Ausdruck, wir müssen also nur noch sortieren:

$$\frac{K_2}{K_0} = (1+i)^2$$
$$\Rightarrow \pm\sqrt{\frac{K_2}{K_0}} = 1+i$$
$$\Rightarrow -1 \pm \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} = i$$

Setzen Sie die Zahlenwerte ein, so erhalten Sie

$$i_1 = -1 + \sqrt{\frac{106,09}{100}} = 0,03 = 3\%$$
$$i_2 = -1 - \sqrt{\frac{106,09}{100}} = -2,03$$

Den negativen Wert können wir ausschließen, da Zinsen von -203% keinen Sinn machen – obwohl die Lösung auch mathematisch richtig ist. Die Zinsen betrugen also 3%.