In der Mathematik muß man so gut wie nichts auswendig lernen, da man sich alles herleiten kann. Trotzdem ist es ganz gut, wenn man einige wenige Dinge direkt parat hat, um sie als Werkzeug benutzen zu können. Dazu gehören die drei binomischen Formeln, die sich mit Quadraten von Summen bzw. Summen von Quadraten beschäftigen.

Der Binomische Lehrsatz beschäftigt sich dann mit höheren Potenzen von Summen.

Die drei Binomischen Formeln

Nein, es hat niemals einen Herrn Binomi gegeben, der diese Formeln erfunden hat. Wikipedia lehrt uns:

> *Das Adjektiv **binomisch** leitet sich vom Substantiv **Binom**, also von bi (zwei) und Nomen (Namen) ab. (Quelle: Wikipedia, Artikel ‚binomische Formeln')*

Diese drei Formeln beschäftigen sich mit den folgenden Ausdrücken:

$$(a+b)^2$$
$$(a+b)^2$$
$$(a+b)(a-b)$$

wobei *a* und *b* beliebige Zahlen sind.

Diese Multiplikationen kann man flugs ausrechnen. Also erhält man für die erste binomische Formel:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 \\
&=(a+b)(a+b) \\
&=a^2+ab+ba+b^2 \\
&=a^2+2ab+b^2
\end{aligned}$$

Bei der zweiten binomischen Formel muß man mit den Vorzeichen aufpassen. Am einfachsten ist es, wenn am den Term $a-b$ als $a+(-b)$ interpretiert und daran denkt, daß minus mal minus plus ergibt. Denken Sie daran, daß der Ausdruck $a(-b)$ bedeutet, daß *a* und *–b* multipliziert werden.

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 \\
&=\left(a+(-b)\right)^2 \\
&=\left(a+(-b)\right)\left(a+(-b)\right) \\
&=aa+a(-b)+b(-a)+(-b)(-b) \\
&=a^2-ab-ab+b^2 \\
&=a^2-2ab+b^2
\end{aligned}$$

Die dritte binomische Formel kann man ebenfalls ausmultiplizieren:

$$(a+b)(a-b)$$
$$=aa+a(-b)+ba+b(-b)$$
$$=a^2-b^2$$

Wie man sieht, heben sich die gemischten Terme $a(-b)$ und ba gerade auf.

Zusammenfassend ergibt sich:

Die drei binomischen Formeln

Erste binomische Formel:	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Zweite binomische Formel:	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Dritte binomische Formel:	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Höhere Potenzen

Was ist mit Ausdrücken der Form $(a+b)^n$, wobei *n* eine natürliche Zahl (also 1,2,3,4…) ist? Berechnen wir die ersten Ausdrücke von Hand, wobei wir für die zweiten Potenzen die erste binomische Formel berücksichtigen können

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)=\ldots$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Wie sie sehen, wird das ganze recht schnell mühsam. Allerdings zeigen die ausmultiplizierten Ausdrücke eine Struktur. Betrachten Sie beim letzten Ausdruck die Potenzen von *a*, so sehen Sie, daß die Potenz von *a* über alle Summanden von 4 bis 0 geht (zur Erinnerung: $a^0=1$)

Genauso geht die Potenz von *b* von 0 bis 4. Vor den Produkten a^nb^m stehen Zahlen, die wir als Koeffizienten bezeichnen. Allgemein kann man sagen, daß die Potenz über eine Summe die folgende Form hat:

$$(a+b)^n=x_0a^nb^0+x_1a^{n-1}b^1+x_2a^{n-2}b^2+\ldots+x_{n-2}a^2b^{n-2}+x_{n-1}a^1b^{n-1}+x_na^0b^n$$

Die Potenzen von *a* laufen von *n* bis 0, die Potenzen von *b* genau andersherum von 0 nach *n*.

Davor stehen Koeffizienten x_i, die wir momentan noch nicht zuordnen können.

Das Pascal'sche Dreieck

Sehen Sie sich die folgende Anordnung von Zahlen einmal genauer an:

n	Koeffizienten x_i										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

Betrachten Sie die dritten Zeile (*n=2*): Hier stehen doch genau die Koeffizienten für $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^3$! Und in der Tat: in der Zeile mit der Nummer *n* stehen genau die Koeffizienten für die Gleichung $(a+b)^n$. Wie ist nun diese Tabelle, die auch das Pascal'sche Dreieck heisst, aufgebaut? In der ersten Zeile (*n=0*)steht einfach eine 1. In der zweiten Zeile (*n=1*)stehen zwei Einsen, aber versetzt, so daß ein Dreieck entsteht. In jeder folgende Zeile steht ganz rechts und ganz links wiederum eine 1, aber immer versetzt zur Zeile darüber. Die anderen Elemente der Zeile berechnen sich nun aus der Summe der beiden Zahlen, die diagonal in der Zeile darüber stehen:

n	Koeffizienten x_i						
0				1			
1			1		1		
2		1		1+1=2		1	
3	1		2+1=3		2+1=3		1

4		1		1+3=4		3+3=6		3+1=4		1	
5	1		1+4=5		4+6=10		4+6=10		4+1=5		1

Mit diesem einfachen Trick kann man nun Potenzen der Form

$$(a+b)^n = x_0 a^n b^0 + x_1 a^{n-1} b^1 + x_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + x_{n-2} a^2 b^{n-2} + x_{n-1} a^1 b^{n-1} + x_n a^0 b^n$$

leicht bestimmen, wobei die x_i dem Pascal'schen Dreieck entnommen werden.

Das Summenzeichen

Wie schon gesagt, Mathematiker sind schreibfaul. Daher ist der obige Ausdruck viel zu lang und wird ganz fix abgekürzt:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} x_i a^{n-i} b^i \\ &= x_0 a^n b^0 + x_1 a^{n-1} b^1 + x_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + x_{n-2} a^2 b^{n-2} + x_{n-1} a^1 b^{n-1} + x_n a^0 b^n\end{aligned}$$

Das Summenzeichen $\sum_{i=0}^{n} \text{Ausdruck}$ besagt, daß der Ausdruck von *i=0* bis *i=n* aufsummiert wird. *0* ist dabei die untere Grenze, *n* die obere Grenze. Beide Grenzen können natürlich variable sein. Einige Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\sum_{i=0}^{3} (i+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 = 30$$

$$\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$$

Das Summenzeichen ist übrigens der große, griechische Buchstabe Sigma.

Der Binomische Lehrsatz

Für große *n* wird die Berechnung über das Pascal'sche Dreieck doch etwas mühselig. Hier bietet sich der Binomische Lehrsatz an:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-1} b^i$$

Die Bedeutung des Summenzeichens ist nun klar. Was aber bedeutet $\binom{n}{i}$ (sprich n über i)? Dazu müssen wir etwas weiter ausholen

Die Fakultät *n!*

Stellen Sie sich einmal vor, sie haben 5 Stühle und wollen darauf 5 Personen verteilen. Wieviele Möglichkeiten (der Mathematiker spricht hier von Permutationen) gibt es dafür?

Dazu besetzen Sie die Stühle nacheinander. Für den ersten Stuhl haben Sie 5 mögliche Personen. Für den zweiten Stuhl bleiben nun 4 mögliche Personen übrig, da eine ja schon auf dem ersten Stuhl sitzt. Für den dritten Stuhl haben Sie noch drei mögliche Personen, für den vierten noch 2 und für den letzten bleibt dann nur noch eine Person übrig, da die anderen vier Personen ja schon sitzen. Also gibt es insgesamt

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Möglichkeiten. Auch für diese Funktion haben die Mathematiker ein Zeichen definiert:

Definition
Sei n ein natürlich Zahl (0,1,2,3…) Die Funktion ‚Fakultät', geschrieben als n! bedeutet
$$n! = n \times (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
Wichtig dabei ist:
$$0! = 1$$

Die Ergänzung $0! = 1$ mag auf den ersten Anblick etwas komisch anmuten – es gibt also genau *eine* Möglichkeit, *keine* Person auf *keinem* Stuhl zu positionieren – ist aber, wie wir gleich sehen werden, mathematisch durchaus sinnvoll.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

Mit dem Wissen um die Fakultät können wir nun auch dem Ausdruck $\binom{n}{k}$ zu Leibe rücken.

Stellen Sie sich vor, Sie wollen Lotto spielen. In einer Plexiglaskugel liegen als Kugeln 49 handbeschriftete, durchnummerierte Tischtennisbälle. Nacheinander werden nun sechs davon gezogen – also dem Vorrat von 49 Kugeln entnommen (und nicht zurückgelegt, das ist wichtig). Wieviele Möglichkeiten für 6 verschieden Zahlen gibt es?

Für die die erste Zahl gibt es 49 mögliche Kugeln. Für die zweite Zahl gibt es nur noch 48 Möglichkeiten, da die eine Kugel – die erste – ja schon entnommen ist.

Also haben wir fast das gleiche Problem wie mit den 5 Personen auf 5 Stühlen. Wir ziehen aber nur 6 Kugeln, also ist die Anzahl der Möglichkeiten

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10068347520$$

Als Lottospieler wissen Sie aber, daß es nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die Kugel gezogen werden. Wenn die Lottozahlen 1,2,3,4,5,6 lauten, geht auch 2,3,4,5,6,1 und alle weiteren Permutationen. Also haben wir in unseren 9839521440 Möglichkeiten noch zu viele. Wir müssen diese Zahl durch die möglichen Permutationen von 6 verschiedenen Kugeln teilen. Und wie viele gibt es davon? Richtig, genau $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Damit haben wir die Gesamtzahl der Möglichkeiten, aus 49 unterschiedlichen Kugeln 6 Stück ohne Rücksicht auf die Reihenfolge zu ziehen:

$$\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{10068347520}{720}=13983816$$ Möglichkeiten.

Der Zähler von dem Bruch sieht fast aus wie eine Fakultät, allerdings fehlen die Zahlen von 43 bis 1. Also ergänzen wir doch einfach den Bruch:

$$\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\quad \cdot 43\cdot 42\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!\cdot \quad 43\cdot 42\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=$$

$$=\frac{49!}{6!43!}$$

43 ist aber grade 49-6 – also können wir den Bruch schreiben als

$$\frac{49!}{6!(49-6)!}=\binom{49}{6}$$

Und erhalten damit den Binomialkoeffizienten $\binom{49}{6}$

Oder allgemein ausgedrückt

Der Binomialkoeffizient n über k ist definiert als

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

und gibt an, wieviel Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge von n unterscheidbaren Elementen k Stück ohne zurückzulegen zu ziehen, wobei die Reihenfolge der gezogenen Elemente keine Rolle spielt.

Berechnen wir nun für *n=5* alle möglichen Binomialkoeffizienten, sieht das so aus:

$$\binom{5}{0}=\frac{5!}{(5-0)!0!}=\frac{5!}{5!0!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\quad \cdot 1}=1$$

$$\binom{5}{1}=\frac{5!}{(5-1)!1!}=\frac{5!}{4!1!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\quad \cdot 1}=5$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!1!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\quad \cdot 1\cdot 2}=10$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{(5-3)!3!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\quad \cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10$$

$$\binom{5}{4}=\frac{5!}{(5-4)!4!}=\frac{5!}{1!4!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\quad \cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=5$$

$$\binom{5}{5}=\frac{5!}{(5-5)!5!}=\frac{5!}{0!5!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\quad \cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1$$

Hier sehen wir, daß die Definition *n!=0* durchaus Sinn macht.

Und was sehen wir noch? Betrachten Sie nochmals die Zeile *n=5* im Pascal'schen Dreieck. Die Koeffizienten lauten

1,5,10,10,5,1

-also genau die Koeffizienten, die vom Binomialkoeffizienten berechnet werde. Damit ist das *n* im Binomialkoeffizienten die Zeile des Pascal'schen Dreiecks und das *k* gibt grade die Nummer des Koeffizienten zurück.

Kleine Ergänzung: $(a-b)^n$

Wie sieht das ganze nun aus, wenn das *b* negativ ist? Dann muß man auf die Vorzeichen aufpassen! Am besten schreibt man die Klammer etwas um:

$$(a-b)^n = \left(a+(-b)\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

Nun bitte an folgendes denken: Ist der Exponent von b gerade, so ergibt sich minus mal minus =plus, ist der Exponent ungerade, ist das Ergebnis negativ, da plus mal minus = minus!

Also als Beispiel

$$\begin{aligned}(x-3)^4 &= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4 \\ &= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81\end{aligned}$$