Aufgabe 1: Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)

a) $10^3 \times 10^{-4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

b) $10^5 \div 10^{-5} = \frac{10^5}{10^{-5}} = 10^5 \times 10^5 = 10^{10}$

c) $\frac{0,3\times 10^5 + 0,7\times 10^5}{10^{-4}} = \frac{1\times 10^5}{10^{-4}} = 10^5 \times 10^4 = 10^9$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie:

a) $\sqrt{8x^2 + x^2} = \sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\sqrt{x^2} = 3x$

b) $\sqrt[3]{x(20x^2 + 7x^2)} = \sqrt[3]{20x^3 + 7x^3} = \sqrt[3]{27x^3} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^3} = 3x$

c) $\frac{\sqrt{3x^2}}{9} = \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt{81}} = \sqrt{\frac{3x^2}{81}} = \sqrt{\frac{x^2}{27}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{27}} = \frac{x}{\sqrt{3\times 9}} = \frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{x}{3\sqrt{3}}$

d) $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = x^{6\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Aufgabe 3: Vereinfachen Sie

a) $3(\log x - \log y) = 3\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$

b) $\frac{\frac{1}{2}\log(x^2)}{\log(x)} = \frac{\log\left(\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\log(x)} = \frac{\log\left(x^{2\times\frac{1}{2}}\right)}{\log(x)} = \frac{\log(x)}{\log(x)} = 1$

c) $\frac{\log x}{\log e} - \ln x + 1 = \ln(x) - \ln(x) + 1 = 1$

Aufgabe 4: Berechnen Sie *x*

a)

$$
\begin{aligned}
&4^x = 2^x + 12 \\
&\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^x + 12 \\
&\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^x + 12 \\
&\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 = 2^x + 12 \\
&Substitution: 2^x = z \\
&\Leftrightarrow z^2 = z + 12 \\
&\Leftrightarrow z^2 - z - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-4)(z+3) = 0 \\
&z_1 = 4 \\
&z_2 = -3
\end{aligned}
$$

Nun muß man die Substitution $2^x = z$ wieder zurückrechnen:

$$2^x = z \Leftrightarrow x = \log_2(z) = \frac{\ln(z)}{\ln(2)}$$

Da der Logarithmus von negativen Zahlen nicht definiert ist, ist die Lösung $z_2 = -3$ ungültig und es gibt nur die Lösung für $z_1 = 4$

$$x = \frac{\ln(z_1)}{\ln(2)} = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$$

b)

$$
\begin{aligned}
&3^x = 4^7 \mid \ln() \\
&\Leftrightarrow \ln\left(3^x\right) = \ln\left(4^7\right) \\
&\Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(13684) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\ln(13684)}{\ln(3)} = 8,833
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: Wieviele Jahre müssen Sie 1€ bei 3% Zinsen anlegen, um 3€ zu erhalten? (Hinweis: Zinsformel $K_n = K_0\left(\frac{p}{100} + 1\right)^n$

Auflösen der Zinsformel nach *n*:

$$K_n = K_0\left(\frac{p}{100}+1\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = \left(\frac{p}{100}+1\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln\left(\left(\frac{p}{100}+1\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n\ln\left(\frac{p}{100}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln\left(\frac{p}{100}+1\right)} = n$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{3€}{1€}\right)}{\ln\left(\frac{3}{100}+1\right)} = \frac{\ln(3)}{\ln(1,03)} = 37,167\,Jahre$$

Aufgabe 6: Ihre Küche hat die Grundfläche 5m x 4m und ist 3m hoch. Sie wollen länger in den Urlaub fahren und haben vergessen, Ihren Mülleimer zu leeren. Leider wohnt in Ihrem Mülleimer ein Exemplar der kreisrunde Amöben *Amöbus schleimus stinkii*, die einen Durchmesser von 10,433 µm hat und sich jeden Tag teilt. Nach wie vielen Tagen hat die Amöbe alle Ihre Küchenflächen (Wände und Decke und Boden) überwuchert?

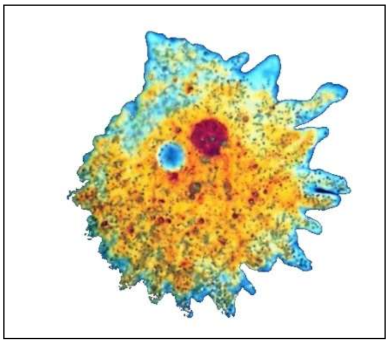

Bild 1: Amöbus schleimus stinkii

Lösung: Überlegung 1: Ihre Küche hat Boden, 2 große Wände, 2 kleine Wände und eine Decke. Die Flächen sind:

Boden: $F_B = 5m \times 4m = 20m^2$

Decke: $F_D = 5m \times 4m = 20m^2$

Eine kleine Wand: $F_{W\ klein} = 5m \times 3m = 15m^2$

Eine große Wand: $F_{W\ groß} = 4m \times 3m = 12m^2$

Die Gesamtfläche der Küche F_K ergibt sich damit zu

$$F_K = F_B + F_D + 2F_{W\ klein} + 2F_{W\ groß} = 20m^2 + 20m^2 + 2\times15m^2 + 2\times15m^2 = 94m^2$$

Überlegung 2: Die Amöbe hat einen Durchmesser von 10,433 µm. Sie ist rund, hat also eine Fläche von

$F_A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$, wobei *r* der Radius bzw. *d* der Durchmesser ist. Berechnen wir nun den Durchmesser der Amöbe in Meter, gibt uns die Formel die Fläche in m^2 – wie auch für die Küche.

Also:

$$10{,}433\mu m = 10{,}433 \times 10^{-6} m$$
$$\Rightarrow F_A = \pi \left(\frac{10{,}433\times10^{-6}}{2}\right)^2 = 8{,}54886\times10^{-11} m^2$$

Für die Anzahl der Amöben *N* als Funktion der Zeit *t* gilt

$$N(t) = 2^t$$

Wobei t die Zeit in Tagen ist. Damit gilt für die Fläche aller Amöben:

$$F(t) = F_A N(t) = F_A 2^t$$

Kurzer Einschub: Ja, Sie haben recht mit dem Argument, daß kreisrunde Amöben ohne Überlappung eine Fläche nicht vollständig abdecken können – aber das lassen wir nun mal weg ☺

Letzdendlich müssen wir bestimmen, wann die Gesamtfläche der Amöben *F(t)* gleich der Fläche der Küche F_K ist

$$F(t) = F_K$$
$$\Leftrightarrow F_A 2^t = F_K$$

Also, Gleichung nach t auflösen:

$$2^t = \frac{F_K}{F_A} \mid \ln()$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(2^t\right) = \ln\left(\frac{F_K}{F_A}\right)$$
$$\Leftrightarrow t\ln(2) = \ln\left(\frac{F_K}{F_A}\right)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{F_K}{F_A}\right)}{\ln(2)}$$

Einsetzen der Zahlenwerte führt zu

$$t = \frac{\ln\left(\frac{94m^2}{8,54886 \times 10^{-11} m^2}\right)}{\ln(2)} = 40 \text{ Tage}$$

Nach 40 Tagen ist Ihre Küche komplett überwuchert ☺