Quadratische Gleichungen in der Form $x^2 = a$ haben wir bereits kennengelernt – was ist aber, wenn das x nun in der Potenz steht, also die Gleichung nun heißt: $a^x = b$ und aufgelöst werden soll?

Kurze Motivation – nochmals Zinsen

Sie legen wiederum ein Kapital von €100 an. Der Prozentzahl soll 3% sein, also gilt $i = 3\% = 0{,}03$. Wieviel Geld haben Sie nach 1,2,3... Jahren – und wie viele Jahre n müssen Sie warten, bis Sie $K_n = 200€$ haben?

Nach dem ersten Jahr haben wir das Kapital K_1, das sich aus unserem Anfangskapital und den Zinsen für das erste Jahr zusammensetzt, also

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$$

Das können wir aber etwas geschickter schreiben, indem wir das K_0 ausklammern:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$$

Wir haben bereits den Aufzinsfaktor $q = 1+i$ eingeführt, und damit wird unsere Gleichung zu

$$K_1 = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q$$

Dieses Geld legen wir im zweiten Jahr wieder an und erhalten

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot p = K_1(1+i) = K_1 \cdot q$$

Setzen Wir nun das $K_1 = K_0 \cdot q$ ein, ergibt das:

$$K_2 = K_1 \cdot q = \underbrace{K_0 \cdot q}_{=K_1} \cdot q = K_1 \cdot q^2$$

Gehen wir nun in das dritte Jahr - Sie legen haben am Anfang K_2, das wiederum verzinst wird und erhalten K_3

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i \overset{K_2 \text{ ausklammern}}{=} K_2 \cdot (1+i) = K_2 \cdot q$$

Setzen wir nun $K_2 = K_0 \cdot q^2$ ein, erhalten wir:

$$K_3 = K_2 \cdot q = \underbrace{K_0 \cdot q^2}_{=K_2} \cdot q = K_0 \cdot q^3$$

Sehe Sie schon die Gesetzmäßigkeit dahinter? Für jedes Jahr kommt multiplikativ der Faktor $q = (1+i)$ dazu. Nach n Jahren haben wir das Kapital K_n

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Unsere Anfangsfrage lautete: Wie lange müssen wir warten, bis wir 200€ haben, wenn unser Grundkapital 100€ waren und wir 3% Zinsen bekommen? Es geht also darum, die Gleichung

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

nach n aufzulösen. Dazu sehen wir uns ersteinmal Potenzen und ihre Gesetze an.

Potenzen und ihre Gesetze

Eine Potenz schreibt sich als

$$a^x$$

dabei nennt man a die Basis und x den Exponenten. Diese Schreibweise besagt nichts anderes, als die Zahl a genau x-mal mit sich selbst zu multiplizieren, also

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$$

Nimmt man die Basis 10, so gibt das n grade die Anzahl der Nullen an:

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\underbrace{00000}_{5\,Nullen}$$

Für diese Potenzen gibt es einige Rechengesetze, die wir uns am Beispiel der Basis 10 veranschaulichen können:

Allgemein	Beispiel
$a^0 = 1$	Allgemein und wichtig – gilt für alle a (außer 0)
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$10^3 \cdot 10^2 = 1000 \cdot 100 = 1000000 = 10^5$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{10^4}{10^2} = \frac{10000}{100} = 100 = 10^2 = 10^{4-2}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$10^{-}3 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(10^2)^3 = 100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6 = 10^{2 \cdot 3}$

Achtung: Das letzte Gesetz gilt nur in der angegebenen Klammerreihenfolge! Wenn Sie die Klammern andersrum setzen, kommt etwas anderes heraus:

$$10^{(2^3)} = 10^8 \neq 10^6 \;!!$$

Soweit, so gut – bisher haben wir uns aber noch nicht angesehen, aus welcher Zahlenmenge die Exponenten n und m kommen. Es sieht so aus, als seinem n und m Elemente der ganzen Zahlen, also $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ist aber nicht so ☺

Um das zu untersuchen, machen wir folgende Vorüberlegung: Was ist

$\sqrt[n]{a^n}$?

a^n sagt: multipliziere a genau n-mal mit sich selbst.

$\sqrt[n]{b}$ oder die n-te Wurzel aus einer Zahl b sagt: Finde eine Zahl, die n mal mit sich selbst multipliziert b ergibt.

Also verhalten sich die n-te Wurzel und die n-te Potenz wie Funktion und Umkehrfunktion, und es gilt:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Sehen Sie sich nun einmal den folgenden Ausdruck an, in dem wir einen Teil vom Exponenten haben, der nicht aus $\mathbb{Z}$ kommt, nämlich die Bruchzahl $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$:

$$a^{n \cdot \frac{1}{n}}$$

wobei a eine reelle, positive Zahl sei.

Der Exponent $n \cdot \frac{1}{n}$ ist natürlich 1, also können wir schreiben:

$$a = a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}}$$

Nach dem Gesetz für Potenzen, die potenziert werden, kann man dieses nun schreiben als

$$a = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sieht jetzt vielleicht nicht so spektakulär aus, aber was heißt das denn? Wenn ich eine beliebige (positive) Zahl a hoch n nehme und das ganz Ding wieder hoch $\frac{1}{n}$, bekomme ich wieder a heraus.Das Potenzieren mit $\frac{1}{n}$ muß also die Umkehrfunktion zum Potenzieren mit n sein – also die n-te Wurzel! Weil:

$$a = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$$

Damit können wir noch zwei Gesetze unserer Sammlung hinzufügen:

Allgemein	Beispiel
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	Probieren Sie es mit dem Taschenrechner mal aus!
$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$	$100^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{100}\right)^3 = 10^3 = 1000$ Auch hier lohnt sich ein Test mit dem Taschenrechner!

Die Potenzgleichung $a^x = b$

Wie können wir nun Gleichungen mit Potenzen lösen? Tut es die Wurzel - weil gerade haben wir ja gesagt, daß Potenz n und n-te Wurzel Funktion und Umkehrfunktion sind. Was passiert, wenn wir die Potenzgleichung verwurzeln, oder, wie der Fachmann sagt, radizieren?

$$\sqrt[x]{a^x} = \sqrt[x]{b} \quad ☹$$
$$\Rightarrow a = \sqrt[x]{b}$$

Prinzipiell nicht falsch, aber hilft uns nicht wirklich weiter – wir wollten ja nicht nach a auflösen! Das Radizieren hilft nur, wenn wir Ausdrücke der folgenden Form nach x auflösen wollen:

$$x^a = b$$
$$\Rightarrow \sqrt[a]{x^a} = \sqrt[a]{b}$$
$$\Rightarrow x \quad = \sqrt[a]{b}$$

Wenn a und b Zahlen sind, können wir x nun ausrechnen. Radizieren hilft also nur weiter, wenn das x die Basis ist und nicht der Exponent. Also brauchen wir für a^x eine geeignete Umkehrfunktion, und das ist der *Logarithmus.*

Der Logarithmus

Oder besser gesagt – die Logarithmen, denn es gibt eigentlich beliebig viele, da es ja auch beliebig viele Basen in der Gleichung $a^x = y$ gibt. Besonders bekannt sind drei Vertreter:

Logarithmus	Löst die Gleichung	Bemerkung
$\ln(x)$	$e^x = b$	Der *natürliche* Logarithmus
$\log(x)$	$10^x = b$	Der *Zehner*logarithmus
$\log_a(x)$	$a^x = b$	Der Logarithmus *zur Basis a*

Das Pärchen $\ln(x) \leftrightarrow e^x$ sind sozusagen die mathematische Urform von Potenz und Logarithmus. Alle anderen Logarithmen lassen sich daraus herleiten.

Interessant sind die Rechengesetze des Logarithmus:

1. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln(a^b) = b\ln(a)$

Der Logarithmus wandelt also Multiplikation in Addition und Potenzierung in Multiplikation um. Diese Gesetze gelten für alle Logarithmen, also auch für $\log(x)$ und $\log_a(x)$.

Gerade mit dem vierten Gesetz kann man nun die Potenzgleichungen lösen, auch allgemein. Gucken Sie mal hier:

$$
\begin{aligned}
& b = a^x && |\text{auf beiden Seiten logarithmieren} \\
& \Rightarrow \ln(b) = \ln(a^x) && |\text{Anwenden des vierten Potenzgesetzes} \\
& \Leftrightarrow \ln(b) = x \cdot \ln(a) && |\div \ln(a) \\
& \Leftrightarrow \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = x
\end{aligned}
$$

Und schon ist die Gleichung gelöst. Dabei ist es egal, welchen Logarithmus Sie benutzen! Probieren Sie es mit Ihrem Taschenrechner an dem folgenden Beispiel aus:

$$10^x = 1000$$

Klar, die Lösung ist $x=3$ – aber probieren Sie den obigen Rechenweg mal mit $\ln(x)$ und $\log(x)$ – es kommt immer das richtige Ergebnis!

Also:

$$
\begin{aligned}
& 10^x = 1000 \\
& \Rightarrow x = \frac{\ln(1000)}{\ln(10)} = \frac{\log(1000)}{\log(10)}
\end{aligned}
$$

Sie sehen, die Logarithmen lassen sich ineinander umformen. Allgemein können wir schreiben:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Lösung der Eingangsaufgabe

Nun zu der Aufgabe am Anfang – wir hatten überlegt, daß die mathematische Formulierung lautet:

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Teilen wir das Ganze erstmal durch K_0 - warum? Damit wir das q^n alleine auf einer Seite haben:

$$
\begin{aligned}
& K_n = K_0 \cdot q^n && |\div K_0 \\
& \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = q^n
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir beide Seite logarithmieren:

$$
\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = q^n && |\text{logarithmieren} \\
& \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln(q^n)
\end{aligned}
$$

Jetzt wird auch der Grund für das Logarithmieren klar: Mit dem 4. Potenzgesetz können wir die Potenz knacken!

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln(q^n) \qquad |\, 4.\text{Logarithmusgesetz}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \ln(q)$$

Nun können wir die Gleichung normal nach n auflösen:

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \ln(q) \qquad |\div \ln(q)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)} = n$$

Schon haben wir die Gleichung gelöst! Setzen wir nun die Zahlenwerte ein:

$$\begin{aligned} K_0 &= 100 \\ K_n &= 200 \\ i &= 0,03 \\ q &= 1 + i = 1,03 \end{aligned}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{200}{100}\right)}{\ln(1,03)} = n \approx 23,45$$

Wir müssen also lumpige 23,45 Jahre warten, bis sich unser Kapital verdoppelt hat. Das Zeichen ≈ bedeutet übrigens ungefähr – der Wert 23.45 ist hier gerundet angegeben, stimmt also nicht genau, nur eben ungefähr.

Und während Sie 23,45 Jahre warten, können Sie ja in der Zwischenzeit einige Aufgaben zu Potenzen lösen – viel Spass ☺

Übrigens – einfach weitere 23,45 Jahre warten und schon haben Sie 400€ ☺ und dann geht’s rapide bergauf.