Aufgabe 1: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =1 \\ 2x_1 & +6x_2 & +4x_3 & =2 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & =4 \end{array}$$

Schreiben wir das System zuerst in unserer Matrixschreibweise auf und legen dann mit dem Gauss los. Normalisieren der ersten Zeile entfällt, weil das Pivotelement schon 1 ist, also gleich abziehen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot Z_1 \\ -Z_1 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Damit sind wir fast schon fertig – dieses Gleichungssystem ist so lieb, daß wir schon überall die Nullen haben. Also nur noch Zeile 2 und 3 normalisieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div 4 \\ \div 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Also können wir nun die Lösung rekursiv errechnen:

Zeile 3: $x_3 = \frac{3}{2}$

Zeile 2: $x_2 = 0$

Zeile 1:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 \mid \text{einsetzen}: x_2 = 0 \; x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 - 0 - 2\cdot\frac{3}{2} = -2$$

Damit haben wir die Gesamtlösung

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 2: Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \end{array}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus und geben Sie alle Lösungen an

Lösungsweg wie eben: Wir setzen die Zahlen in das Matrixsystem ein

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -6 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Wir normalisieren die Pivotzeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -6 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \div 2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -6 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot Z_1 \\ -3\cdot Z_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Erste Spalte ist fertig, also wandert das Pivotelement einen weiter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \div 2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt haben wir in der dritten Zeile eine Nullzeile, also gilt

Zeile 3: $x_3 \in \mathbb{R}$

Zeile 2:
$$x_2 - 2x_3 = -4$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -4 - 2x_3$$

Zeile 1:
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 \mid \text{einsetzen: } x_2 = -4 - 2x_3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + 2\cdot(-4 - 2x_3) - x_3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -7 - 5x_3$$

Also folgt die Gesamtlösung:

$$x_1 = 9 + x_3$$
$$x_2 = -4 - 2x_3$$
$$x_3 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3: Heinz, Ella und Ulf verdienen unterschiedlich. Ella verdient doppelt so viel wie Heinz, Ulf verdient doppelt so viel wie Heinz und Ella zusammen. Weiterhin verdient Ulf 5000€ mehr als Heinz. Wer verdient wie viel?

Zuerst müssen wir die Textaussagen in Gleichungen fassen. Nehmen wir für die Verdienste von Heinz, Ella und Ulf die Variablen H,E und U.

1) Ella verdient doppelt so viel wie Heinz:

$$E = 2 \cdot H$$

2) Ulf verdient doppelt so viel wie Heinz und Ella zusammen:

$$U = 2 \cdot (H + E)$$

3) Ulf verdient 5 000 € mehr als Heinz

$$U = H + 5000$$

Sortieren wir die Variablen in der Reihenfolge H,E und U und schreiben wir die Gleichungen untereinander:

$$\begin{aligned} &2 \cdot H - E &&= 0 \\ &2 \cdot H + 2 \cdot E - U &&= 0 \\ &-H + U &&= 5000 \end{aligned}$$

Also folgt für unsere Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5000 \end{array}\right) \div 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ +Z_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5000 \end{array}\right)$$

Erste Spalte fertig, also wandert das Pivotelement nach unten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5000 \end{array}\right) \div 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5000 \end{array}\right) + \tfrac{1}{2} Z_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 5000 \end{array}\right)$$

Wieder eine Spalte fertig, also wandert das Pivotelement einen weiter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{\frac{5}{6}} & 5000 \end{array}\right) \div \tfrac{5}{6} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 6000 \end{array}\right)$$

Wir lesen die Lösung ab un denken daran, daß die Variablen H,E und U heißen:

Zeile 3: $U = 6000$

Zeile 2: $E - \frac{1}{3} U = 0$

$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{3} U = \frac{1}{3} \cdot 6000 = 2000$$

Zeile 1: $H-\frac{1}{2}E=0$

$$\Leftrightarrow H=\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}\cdot 2000=1000$$

Also verdient Heinz 1 000 €, Ella 2 000 € und Ulf 6 000 €

Aufgabe 4: Ihre Wohnung ist 2,60 hoch. Sie wollen einen Tannenbaum in einen Ständer stellen und eine Spitze draufpfropfen. Der Ständer soll doppelt so hoch wie die Spitze sein. Der Baum kostet 20€/m, die Spitze 1€/cm; den höhenvariablen Ständer haben Sie bereits - und Sie haben 60 €. Wie hoch muß der Baum, die Spitze und der Ständer sein, wenn der Baum mit Spitze und Ständer genau bis unter die Decke gehen soll und Sie die gesamten 60 € ausgeben wollen?

Und wieder heißt es erstmal, aus den Informationen die Gleichungen zu extrahieren. Geben wir den Variablen Namen:

x_1 sei die Höhe vom Ständer, x_2 die vom Baum und x_3 die Höhe von der Spitze, und zwar alles in cm.

1) Ständer doppelt so hoch wie Spitze:

$$x_1=2x_3$$

2) Alles zusammen 260 cm hoch:

$$x_1+x_2+x_3=260$$

3) Das Geld – Achtung, die Einheiten: Baum: 20€/m entspricht 0,2€/cm. Spitze: 1€/cm. Also:

$$0{,}2\cdot x_2+x_3=60$$

Gleichungen sortieren:

$$x_1-2x_3=0$$
$$x_1+x_2+x_3=260$$
$$0{,}2x_2+x_3=60$$

Damit ergibt die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & 0{,}2 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

Das erste Pivotelement ist schon 1, also können wir direkt die erste Spalte bearbeiten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & 0,2 & 1 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -Z_1 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 260 \\ 0 & 0,2 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

Erste Spalte ist fertig, das Pivotelement wandert nach unten – Normalisierung entfällt, da das Pivotelement schon 1 ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 260 \\ 0 & 0,2 & 1 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -0,2Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 260 \\ 0 & 0 & 0,4 & 8 \end{array}\right)$$

Die weite Spalte ist fertig, nun noch das Pivotelement in die dritte Spalte verschieben und normalisieren, dann sind auch wir fertig:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 260 \\ 0 & 0 & 0,4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \div 0,4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 260 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösungen wieder ablesen:

Zeile 3: $x_3 = 20$

Zeile 2: $x_2 + 3x_3 = 260$

$\Leftrightarrow x_2 = 260 - 3x_3 \mid \text{einsetzen } x_3 = 20$

$\Leftrightarrow x_2 = 260 - 3 \cdot 20 = 200$

Zeile 1: $x_1 - 2x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2x_3 = 2 \cdot 20 = 40$

Also muß Ihr Ständer 40 cm hoch sein, der Baum 200 cm und die Spitze 20 cm.

Aufgabe 5: Zum Knobeln: Sie haben 4 Münzen in der Tasche im Wert von 10 Ct, 20 Ct und 50 Ct. Eine Münze ist doppelt, aber Sie wissen nicht, welche. Nun müssen Sie genau 90 Ct mit vier Münzen bezahlen. Zeigen Sie mit dem Gauss-Algorithmus, dass es dafür genau eine mögliche Stückelung gibt.

Hinweis: Setzen Sie als Variablen die Anzahl der Münzen. Bedenken Sie, falls Sie ein Gleichungssystem mit mehreren Lösungen bekommen, daß die Variablen nicht negativ werden dürfen!

Zuerst müssen wir unsere Variablen bestimmen:

x_1: Anzahl der 10 Ct-Münzen

x_2: Anzahl der 20 Ct-Münzen

x_3: Anzahl der 50 Ct-Münzen

Nun interpretieren wir wieder die Gleichungen:

1) Wir müssen genau 90 Ct bezahlen:

$$10x_1 + 20x_2 + 50x_3 = 90$$

2) Wir haben 4 Münzen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Nun haben wir nur zwei Gleichungen, aber 3 Unbekannte – macht nix, wir füllen die letzte Zeile in unserer Matrix mit Nullen auf, denn die Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

Ist immer richtig. Also: Matrix einsetzen, Normalisieren und in der ersten Spalte die Nullen erzeugen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 20 & 50 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \div 10 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) - Z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die erste Spalte ist fertig, also wieder Pivotelement um eins heruntersetzen und los gehts:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \div(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Schon sind wir fertig, weiter nach unten können wir das Pivotelement nicht setzen. Sehen wir uns die Lösung an:

3. Zeile: Eine Nullzeile, also x_3 beliebig

2. Zeile: $x_2 + 4x_3 = 5 \Leftrightarrow \mathrm{x}_2 = 5 - 4x_3$

1.Zeile:

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 9 - 2x_2 - 5x_3 \mid \text{einsetzen von } \mathrm{x}_2 = 5 - 4x_3 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 9 - 2 \cdot (5 - 4x_3) - 5x_3 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = -1 + 3x_3 = 3x_3 - 1 \end{aligned}$$

Hmm.. wir haben unendlich viele Lösungen, die lauten:

$$\begin{aligned} & x_1 = x_3 - 1 \\ & x_2 = 5 - 4x_3 \\ & x_3 \text{ beliebig} \end{aligned}$$

Aber stop – so beliebig darf unser x_3 dann doch nicht sein, denn es darf nur eine positive ganze Zahl sein, ddenn es handelt sich ja um eine Anzahl, und wir können nicht eine negative Anzahl von Münzen in der Tasche haben – oder eine Kommazahl!

Das gilt aber auch für alle anderen Variablen, also:

$$x_1 = x_3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq 1$$

Also muß x_3 größer oder gleich eins sein. Aus der Gleichung für x_2 folgt:

$$\begin{aligned}
&x_2 = 5 - 4x_3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 5 - 4x_3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -4x_3 \geq -4 \mid \div(-1) \text{ Achtung: Relationszeichen dreht sich um} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{x}_3 \leq \frac{5}{4} = 1{,}25
\end{aligned}$$

Damit muß x_3 kleiner oder gleich 1,25 sein. Beide Bedingungen ergeben

$$\begin{aligned}
&(x_3 \geq 1) \wedge (x_3 \leq 1{,}25) \\
&\Leftrightarrow 1 \leq x_3 \leq 1{,}25
\end{aligned}$$

Da x_3 aber nur eine ganze Zahl sein kann, kann x_3 nur eins sein! Somit haben wir die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned}
&x_3 = 1 \\
&x_2 = 5 - 4x_3 = 1 \\
&x_1 = 3x_3 - 1 = 2
\end{aligned}$$

Damit brauchen Sie zwei 10Ct-Münzen, eine 20 Ct-Münze und eine 50 Ct-Münze.