Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Hund und eine Leine gekauft – und vergessen, was wieviel gekostet hat. Sie wissen nur noch, daß Hund und Leine zusammen 110 € gekostet haben. Also rufen Sie im Tierladen an – und da wird Ihnen gesagt, daß der Hund 100 € mehr als die Leine gekostet hat. Was, sie haben die Lösung schon beim Lesen erraten, 10€ die Leine und 100€ der Hund? Nett, aber leider falsch – denn dann wäre der Hund nur 90 € teurer als die Leine gewesen ☺

Wir haben hier ein Beispiel für ein System von linearen Gleichungen. Versuchen wir, die Textangaben in Gleichungen umzusetzen. Dazu bezeichnen wir den Preis des Hundes mit H, den Preis der Leine mit L.

1. Beides zusammen hat 100€ gekostet: $H+L=110$
2. Der Hund war 100 € teurer als die Leine: $H=L+100$

Stellen wir nun beide Gleichungen um, so daß links die Variablen stehen und rechts die konstanten Zahlen:

$$
\begin{aligned}
H+L&=110\\
H-L&=100
\end{aligned}
$$

Natürlich können wir nun einsetzen, aber probieren wir mal etwas Neues: Wir subtrahieren beide Gleichungen voneinander

$$
\begin{array}{ll}
1) & H+L=110\\
2) & H-L=100\\
\hline
1)-2) & 2L=10
\end{array}
$$

Damit haben wir eine Gleichung mit einer unbekannten, die wir nun lösen können:

$$2L=10 \Leftrightarrow L=5$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$
\begin{array}{ll}
1) & H+L=110\\
2) & H-L=100\\
\hline
1)+2) & 2H \quad =210
\end{array}
$$

Und schon wieder haben wir eine Gleichung, die nur eine Unbekannte enthält und die wir lösen können:

$$2H=210 \Leftrightarrow H=105$$

Der Wuffel hat also 105 € gekostet, die Leine 5 €. Und was haben wir gelernt: Wir können Gleichungen addieren und so zusehen, daß einzelne Variablen herausfallen.

Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem sieht in allgemeiner Form so aus: Es hat m Variablen und n Gleichungen

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n
\end{array}$$

Die Koeffizienten $a_{i,j}$ sind die Faktoren vor den Variablen x_j, die konstanten Zahlen b_i sind die Zahlen auf der rechten Seite. Bei den Koeffizienten bezeichnet der erste Index i die Nummer der Gleichung, der zweite Index j zu welcher Variablen sie gehören.

Daß unsere Variablen x_j heißen, interessiert eigentlich niemanden, wichtig sind lediglich die Koeffizienten und die Konstanten. Diese können wir auch in ein eigenes Schema schreiben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & b_n
\end{array}\right)$$

Dieses Schema nennen wir die *erweiterte Koeffizientenmatrix*. Jede Zeile in diesem Schema steht dabei für eine Gleichung um linearen Gleichungssystem, jede Spalte für eine Variable. Unser Hund-Halsband-Problem sähe dann übrigens so aus:

$$\left.\begin{array}{l} H + L = 110 \\ H - L = 100 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 110 \\ 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Die obere Dreiecksmatrix

Stellen wir uns nun einmal vor, wir könnten das allgemeine Gleichungssystem umformen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} & \cdots & a'_{1,m} & b'_1 \\
0 & 1 & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,m} & b'_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & a'_{n-1,m} & b'_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b'_n
\end{array}\right)$$

Dieses System hat auf der linken Seite unterhalb der Diagonalen (die $a_{i,i}$) nur Nullen, auf der Diagonalen nur Einsen. Der Strich an den Größen heißt, daß sich die Zahlenwerte beim Umformen verändert haben (können). Diese Matrix nennt man (zumindest den linken Teil davon) *Obere Dreiecksmatrix*.

Sehen Sie sich nun einmal die unterste Zeile an, die steht doch für eine Gleichung:

$$\begin{array}{l}
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_m = b'_m \\
\Leftrightarrow x_m = b'_m
\end{array}$$

Damit haben wir die Variable x_m bereits bestimmt!

In der Zeile darüber steht nun:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+1\cdot x_{m-1}+a'_{n-1}\cdot x_m=b'_{m-1}$$
$$\Leftrightarrow x_{m-1}+a'_{n-1}\cdot x_m=b'_{m-1}$$
$$\Leftrightarrow x_{m-1}=b'_{m-1}-a'_{n-1}\cdot x_m$$

Sieht kompliziert aus, aber: Die Variable x_m haben wir aus der letzten Zeile bestimmt, dann können wir damit aus der vorletzten Zeile die Variable x_{m-1} bestimmen! Aus der Zeile darüber können wir nun die Variable x_{m-2} bestimmen, da wir x_m und x_{m-1} schon kennen – und so weiter bis zur obersten Zeile für x_1. In jeder Zeile können wir eine neue Variable berechnen. Ein solches Verfahren nennt man *rekursiv*.

Erlaubte Zeilenoperationen

Grundlage dafür ist aber, daß wir die Matrix in eine obere Dreiecksmatrix umformen können. Dazu gibt es die erlaubten Zeilenoperationen, eine davon haben wir schon beim Hund-Leine-Beispiel gesehen: Wir dürfen zwei Geleichungen addieren, ohne das Gleichungssystem zu verändern. Da in der erweiterten Koeffizientenmatrix jede Zeile für eine Gleichung steht, nennen wir das nun erlaubte Zeilenoperationen:

- Man darf zu einer Zeile eine andere dazu addieren
- Man darf eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren (was dem Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl entspricht
- Man darf zwei Zeilen vertauschen (was dem Vertauschen von zwei Gleichungen entspricht)

Mit diesen Operationen können wir tatsächlich jede Matrix in eine obere Dreiecksgestalt bringen!

Der Gauss-Algorithmus

Sehen wir uns das Procedere an einem Beispiel an: Wir haben das Beispielgleichungssystem

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2+4x_3&=18\\2x_1+x_2&=4\\x_1+2x_2&=5\end{aligned}$$

Bringen wir das System in die erweiterte Koeffizientenmatrix. In Zeile 2 und 3 ist x_3 nicht enthalten, also hat es den Faktor 0. Damit wird unser Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2+4x_3&=18\\2x_1+\ \ x_2+0x_3&=4\\x_1+2x_2+0x_3&=5\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix lautet dann:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&4&18\\2&1&0&4\\1&2&0&5\end{array}\right)$$

Wir wollen jetzt, daß unter der Diagonalen nur Nullen stehen. Dazu gehen wir Spaltenweise vor. Zuerst setzen wir ein sogenanntes Pivotelement (Pivot bedeutet ‚ausgezeichnet') auf den ersten Koeffizienten $a_{1,1}$. Damit ist unsere Pivotzeile = 1 und unsere Pivotspalte auch.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Zuerst machen wir das Pivotelement zu 1 – dazu teilen wir die Pivotzeile durch den Wert des Pivotelementes. Um die Übersicht zu wahren, schreiben wir die Rechenoperation neben die Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \div 2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir von den Zeilen unter der Pivotzeile ‚geeignete' Vielfache ab, so daß alle Werte in der Pivotspalte unter dem Pivotelement zu Null werden. Also: von Zeile 2 ziehen wir die Pivotzeile ab, von Zeile 3 das Zweifache der Pivotzeile. Abziehen bedeutet, daß wir jeweils die Werte in den Spalten subtrahieren. Achtung: Es wird immer nur die Pivotzeile bzw. ein Vielfaches davon von den Zeilen unterhalb abgezogen, niemals eine andere Zeile! Ansonsten würden wir Gefahr laufen, unser Gleichungssystem ‚kaputtzumachen'.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot Z_1 \\ -Z_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 1 & 0-2\cdot 2 & 4-2\cdot 9 \\ 1-1 & 2-1 & 0-2 & 5-9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Jetzt sind wir mit der ersten Spalte fertig, auf der Diagonale steht die 1 und darunter nur Nullen. Nun wandern wir mit den Pivotelement eine Zeile und eine Spalte weiter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Wir machen das Pivotelement wieder zu 1, indem wir die ganze Zeile durch den Wert teilen. Dieser Schritt heiß übrigens *Normalisieren*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \div(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Um jetzt die Null unter dem Pivotelement zu erzeugen, ziehen wir von der dritten Zeile einmal die Pivotzeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0-0 & 1-1 & -2-4 & -4-14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

Jetzt sind wir fast fertig – wir lassen unser Pivotelement in die letzte Zeile uns Spalte wandern und normalisieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \div(-6) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sehen wir uns nun die letzte Zeile an, so entspricht sie der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 3$$

Damit haben wir den Wert für x_3 gefunden. Die zweite Zeile heißt, als Gleichung interpretiert:

$$0x_1 + x_2 + 4x_3 = 14$$
$$\Leftrightarrow x_2 + 4x_3 = 14$$

Den Wert für x_3 kennen wir ja nun schon – also können wir nach x_2 auflösen und unser x_3 einsetzen:

$$x_2 + 4x_3 = 14$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 14 - 4x_3 \quad | \, x_3 = 3 \text{ einsetzen}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 14 - 4 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 2$$

Mit der oberen Zeile können wir nun x_1 bestimmen:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \quad | \text{umstellen nach } x_1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 9 - x_2 - 2x_3 \quad | \text{einsetzen von } x_2 = 2 \text{ und } x_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 9 - 2 - 2 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1$$

Schon haben wir unser Gleichungssystem gelöst:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Allgemeines Kochrezept für Gauss

Jetzt wollen wir den Gauss-Algorithmus allgemein beschreiben.

Zutaten:

- n Gleichungen mit n Unbekannten

Rezept:

1. Nimm die Information aus dem Gleichungssystem und bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix. Dabei sollen die Koeffizienten $a_{i,j}$ links vom Strich stehen, die konstanten Werte b_i rechts.

2. Setze die erste Zeile und erste Spalte als Pivotspalte- und -Pivotzeile

3. Teile die Pivotzeile durch den Wert des Pivotelementes (Normalisieren) Damit wird der Wert des Pivotelementes zu 1. (entfällt, wenn $a_{1,1} = 1$)

4. Unter dem Pivotelement sollen nur Nullen stehen. Diese Nullen erzeugen wir, indem wir von allen Zeilen, die unter der aktiven Zeile stehen, die Pivotzeile mit einem geeigneten Faktor multipliziert, abziehen. Achtung: Wir subtrahieren nur geeignete Vielfache der Pivotzeile, niemals andere Zeilen!

5. Erhöhe die Pivotzeile und die Pivotspalte jeweils um 1. Wenn der neue Wert $= n$ ist, dann gehe zu 6, sonst gehe zu 3.

6. Mache für die letzte Zeile die Normalisierung.
7. Jetzt haben wir hoffentlich die obere Dreiecksgestalt, bei der in der Hauptachse nur Einsen stehen, darunter nur Nullen, darüber irgendwelche Zahlen.
8. Entnimm der untersten Zeile den Wert für x_n .

9. Die Zeile darüber ergibt umgestellt das x_{n-1} . Stelle diese Gleichung nach um, und löse sie und setze das bekannte x_n ein.

10. Wiederhole 9 mit allen weiteren Zeilen bis zur ersten Zeile.

Fertig.

Küchentricks:

- Manchmal, wenn in einer Zeile viele Brüche stehen, kann es sinnvoll sein, diese Zeile mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner zu multiplizieren.
- Sollte das Gleichungssystem bösartig sein, so daß das Pivotelement Null ist - dann denke daran, daß Du Zeilen vertauschen darfst!
- Manchmal kann man sich durch das Vertauschen von Zeilen viel Rechenarbeit sparen!

Sonderfall 1: Unendlich viele Lösungen

Damit haben wir in Grundzügen den Gauss-Algorithmus umschrieben. Leider kann dieser aber noch zwei Sonderfälle haben. Sehen Sie sich mal dieses Gleichungssystem an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

Legen wir los mit dem Lösen: Pivotelement nach oben links und erste Zeile Normalisieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right) \div 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

Jetzt unterhalb des Pivotelementes die Nullen erzeugen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ -4Z_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right)$$

Pivotelement wandert einen weiter, wir normalisieren die zweite Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \div(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right)$$

Nun addieren wir zur dritten Zeile die Pivotzeile, um unter dem Pivotelement die Null zu erzeugen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Uups – eine Nullzeile! Hier können wir nicht mehr weitermachen, denn wir bekommen das nächste Pivotelement nicht mehr durch Multiplikation zu 1. Ist aber eigentlich gar nicht schlimm, denn was besagt die dritte Zeile, mit der wir x_3 bestimmen:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Welche x_3 lösen denn nun die Gleichung $0 \cdot x_3 = 0$? Na – alle, denn egal, was ich mit für ein x_3 aussuche, multipliziert mit 0 ergibt das immer Null! Also ist unser x_3 völlig beliebig und wir können es so aufschreiben:

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

Unser x_2 ist aber nicht mehr beliebig, denn die zweite Zeile besagt:

$$\begin{aligned} & 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 14 \\ \Leftrightarrow\ & x_2 = 14 - 4x_3 \end{aligned}$$

Wenn wir also ein x_3 gewählt haben, ist das x_2 damit festgelegt! Wie isses nun mit dem x_1? Sehen wir auf die erste Zeile:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 9 - x_2 - 2x_3 \mid x_2 = 14 - 4x_3 \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 9 - (14 - 4x_3) - 2x_3 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 9 - 14 + 4x_3 - 2x_3 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = -5 + 2x_3 \end{aligned}$$

Damit haben wir folgende Lösung:

$$x_1 = -5 + 2x_3$$
$$x_2 = 14 - 4x_3$$
$$x_3 \in \mathbb{R}$$

Wir haben also keine eindeutige Lösung mehr, aber trotzdem ist, was wir haben, eine Lösung!

Sonderfall 2: Nicht Lösbare Systeme

Sehen Sie nun auf das folgende System:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 24 \end{array}\right)$$

Es sieht fas t aus wie eben – nur statt der 22 im konstanten Teil steht nun eine 24 – was passiert dann nun? Lösen wir das System:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \div 2 \\ \to \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2Z_1 \to \\ -4_{Z1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

Pivotelement weiterwandern lassen, normalisieren und Nullen darunter erzeugen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \end{array}\right) \div(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \to \\ +Z_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt haben wir ein Problem: Die untere Zeile lautet als Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$$

Es gibt aber keine Zahlen, die man mit Null multipliziert, addiert und die dann 2 ergeben – da kommt immer nur Null raus! Also hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Nicht quadratische Systeme

Bisher sind wir immer davon ausgegangen, daß wir genauso viel Gleichungen wie Variablen haben. Was machen wir nun, wenn wir mehr Variablen als Gleichungen haben, also z.B.

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

Unsere erweiterte Koeffizientenmatrix sähe dann so aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Na, ergänzen wir doch einfach Nullzeilen, denn die sind ja für alle x_i gültig:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Und damit sehen wir schon, daß ein solches System entweder unendlich viele Lösungen hat – oder gar keine.